

Bonyolultságelmélet

I. Időbonyolultság

A. Determinisztikus és nemdeterminisztikus időbonyolultsági osztályok

- $\text{TIME}(f(n)) = \{L \mid L \text{ eldönthető } O(f(n)) \text{ időigényű determinisztikus Turing-géppel}\}$
- $\text{NTIME}(f(n)) = \{L \mid L \text{ eldönthető } O(f(n)) \text{ időigényű nemdeterminisztikus Turing-géppel}\}$
- $P = \bigcup_{k \geq 1} \text{TIME}(n^k)$.
- $NP = \bigcup_{k \geq 1} \text{NTIME}(n^k)$.
- Észrevétel: $P \subseteq NP$.
- Sejtés: $P \neq NP$ (sejtjük, hogy igaz, de bizonyítani nem tudjuk).

B. Visszavezetés polinom időben

B1. Definíció

- $f : \Sigma^* \rightarrow \Delta^*$ **polinom időben kiszámítható**, ha van olyan Turing-gép, ami polinom időben kiszámítja. (lásd szófüggvényt kiszámító TG-ek)
- $L_1 \subseteq \Sigma^*$ **polinom időben visszavezethető** $L_2 \subseteq \Delta^*$ -ra, ha van olyan $f : \Sigma^* \rightarrow \Delta^*$ polinom időben kiszámítható szófüggvény, hogy $w \in L_1 \Leftrightarrow f(w) \in L_2$. Jelölés: $L_1 \leq_p L_2$.

B2. Tételek

- Ha $L_1 \leq_p L_2$ és $L_2 \in P$, akkor $L_1 \in P$.
- Ha $L_1 \leq_p L_2$ és $L_2 \in NP$, akkor $L_1 \in NP$.

C. NP-teljesség

C1. Definíció

Egy L probléma **NP-teljes**, ha NP-beli és minden NP-beli probléma polinom időben visszavezethető rá.

C2. Tételek

- Ha L NP-teljes és $L \in P$ akkor $P=NP$.
- Ha L_1 NP-teljes, $L_2 \in NP$ és $L_1 \leq_p L_2$ akkor L_2 NP-teljes.

C3. Logika gyorstalpaló

- A logika **ítéletlogika** (nulladrendű logika) nevű modelljében egy logikai formula **ítéletváltozók**ból és **logikai műveletek**ből (pl. tagadás ($\neg$, negáció), logikai és ($\wedge$, konjunkció), megengedő vagy ($\vee$, diszjunkció)) épül fel. Az ítéletváltozókat **igazra** vagy **hamisra** értékelhetjük ki. Egy formula **igazságértékét** az ítéletváltozók adott kiértékelése mellett a formula felépítésére vonatkozó rekurzió alapján kapjuk meg. Egy formula **kielégíthető**, ha van olyan kiértékelés, ami igazra értékeli ki.
- Tétel: Minden formulához van vele ekvivalens KNF.
- **Literál**: egy ítéletváltozó vagy egy negált ítéletváltozó. **Tag**: literálok (lehet 1 darab is) diszjunkciója. **Konjunktív normálforma (KNF)**: Tagok (lehet 1 darab is) konjunkciója.
- Példa: $\varphi = (X \vee \neg Y) \wedge (\neg X \vee \neg Y \vee Z) \wedge \neg Z$ kielégíthető KNF, például ha mindhárom ítéletváltozó hamis, akkor φ igaz. $X \wedge (\neg X \vee \neg Y) \wedge Y$ kielégíthetetlen KNF.

C4. Egy NP-teljes nyelv

- Legyen $\text{SAT} = \{\langle \varphi \rangle \mid \varphi \text{ kielégíthető KNF}\}$, ahol $\langle \phi \rangle$ a ϕ formula valamilyen dekódolható kódja $\{0, 1\}$ felett.
- Tétel (Cook): SAT NP-teljes.

D. Nevezetes (előadáson ismertetett) NP-teljes nyelvek

($\langle \rangle$) mindig valamilyen kellően tömör dekódolható kódolást jelent $\{0, 1\}$ felett, most nem a kódolásra fókuszálunk.)

- $\text{SAT} = \{ \langle \varphi \rangle \mid \varphi \text{ kielégíthető KNF} \}$ (Cook tétel)
- $\text{3SAT} = \{ \langle \varphi \rangle \mid \varphi \text{ kielégíthető KNF és minden tagban pontosan 3 literál van} \}$
- $\text{3SZÍNEZÉS} = \{ \langle G \rangle \mid G \text{ 3-színezhető} \}$
(egy gráf 3-színezhető, ha csúcsai 3 színnel színezhetők úgy, hogy a szomszédos csúcsok színei különbözőek)
- $\text{KLIKK} = \{ \langle G \rangle \mid G\text{-nek van } k \text{ méretű teljes részgráfja} \}$
(G irányítatlan gráf; $k \in \mathbb{N}$ előre rögzített)
- $\text{FÜGGETLEN CSÚCSHALMAZ} = \{ \langle G \rangle \mid G\text{-nek van } k \text{ méretű üres részgráfja} \}$
(G irányítatlan gráf; $k \in \mathbb{N}$ előre rögzített)
- $\text{CSÚCSLEFEDÉS} = \{ \langle G \rangle \mid \text{van } k \text{ méretű részhalmaza } V(G)\text{-nek, ami az összes élt lefoglalja} \}$
(G irányítatlan gráf; $k \in \mathbb{N}$ előre rögzített; egy $S \subseteq V(G)$ lefoglalja E élt, ha $S \cap E \neq \emptyset$)
- $\text{HITTING SET} = \{ \langle T \rangle \mid \text{van olyan } k \text{ méretű } S \text{ halmaz, ami az összes } T\text{-beli halmazt lefoglalja} \}$
(T halmazok halmaza; $k \in \mathbb{N}$ előre rögzített; egy S halmaz lefoglalja egy X halmazt, ha $S \cap X \neq \emptyset$)
- $\text{HALMAZFEDÉS} = \{ \langle U, T \rangle \mid \text{van } k \text{ darab } T\text{-beli halmaz, aminek uniója } U \}$
(U egy halmaz; T U részhalmazainak egy halmaza; $k \in \mathbb{N}$ előre rögzített)
- $\text{HÚ} = \{ \langle G \rangle \mid \text{van a } G \text{ irányított gráfban } s\text{-ből } t\text{-be Hamilton út} \}$
(A Hamilton út olyan út, ami minden csúcsot bejár; s és t előre rögzítettek)
- $\text{IHÚ} = \{ \langle G \rangle \mid \text{van a } G \text{ irányítatlan gráfban } s\text{-ből } t\text{-be Hamilton út} \}$
(s és t előre rögzítettek)
- $\text{IHK} = \{ \langle G \rangle \mid \text{van a } G \text{ irányítatlan gráfban Hamilton kör} \}$
- $\text{UTAZÓÜGYNÖK} = \{ \langle G \rangle \mid \text{van-e a } G\text{-ben legfeljebb } k \text{ súlyú Hamilton kör} \}$
(G pozitív egészekkel élsúlyozott irányítatlan gráf; $k \in \mathbb{N}$ előre rögzített)

II. Tárbonyolultság

E. A tárbonyolultság mértékegysége

A tárbonyolultság vizsgálatához ún. **off-line Turing-gépeket** használunk. Az első szalag a bemeneti szalag, ezt csak olvashatja, az utolsó szalag a kimeneti szalag, erre csak írhat. A Turing-gép **tárigénye** a többi szalagon (ún. munkaszalagokon) felhasznált cellák száma. Egy Turing-gép $f(n)$ **tárkorlátos**, ha bármely u inputra legfeljebb $f(|u|)$ tárat használ.

F. Determinisztikus és nemdeterminisztikus tárbonyolultsági osztályok

- $\text{SPACE}(f(n)) = \{ L \mid L \text{ eldönthető } O(f(n)) \text{ tárkorlátos determinisztikus Turing-géppel} \}$
- $\text{NSPACE}(f(n)) = \{ L \mid L \text{ eldönthető } O(f(n)) \text{ tárkorlátos nemdeterminisztikus Turing-géppel} \}$
- $\text{PSPACE} = \bigcup_{k \geq 1} \text{SPACE}(n^k)$.
- $\text{NPSPACE} = \bigcup_{k \geq 1} \text{NSPACE}(n^k)$.
- $\text{NL} = \text{NSPACE}(\log n)$.

G. Savitch tétele és következményei

- (Savitch tétele) Ha $f(n) \geq \log n$, akkor $\text{NSPACE}(f(n)) \subseteq \text{SPACE}(f^2(n))$
- $\text{PSPACE} = \text{NPSPACE}$
- $\text{NL} \subseteq \text{SPACE}(\log^2 n)$